

Unidad IV: Funciones reales de varias variables.

4.1 Definición de una función de varias variables.

Funciones de varias variables

Introducción

Muchas magnitudes que nos resultan familiares son funciones de dos o más variables independientes. Por ejemplo, el trabajo w realizado por una fuerza $w = f \cdot d$, el volumen V de un cilindro circular recto $V = V(r, h) = \Pi \cdot r^2 \cdot h$, el área de un triángulo $A = b \cdot h$, son todas funciones de dos variables. El volumen de una caja rectangular $V = V(l, a, h) = l \cdot a \cdot h$ es una función de tres variables.

Denotaremos una función de dos o mas variables de la forma usual

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

$$z = f(x, y) = xyz$$

4.2 Gráfica de una función de varias variables

de manera análoga podemos definir funciones de tres o mas variables, $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. En todo caso el dominio será un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y el recorrido un subconjunto de $\mathbb{R}$. Para efectos del curso nos limitaremos a estudiar los casos $n = 2, 3$.

Ejemplo 1

Hallar y dibujar el dominio de las siguientes funciones

1. $f(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

2. $g(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y}}$

Solución

Para hallar el dominio de f recuerde que el argumento de una raíz cuadrada debe ser positivo o cero :

$$9 - (x^2 + y^2)$$

$$x^2 - y$$

Lo cual corresponde al interior de un círculo de radio 3, como se muestra en la figura 1.

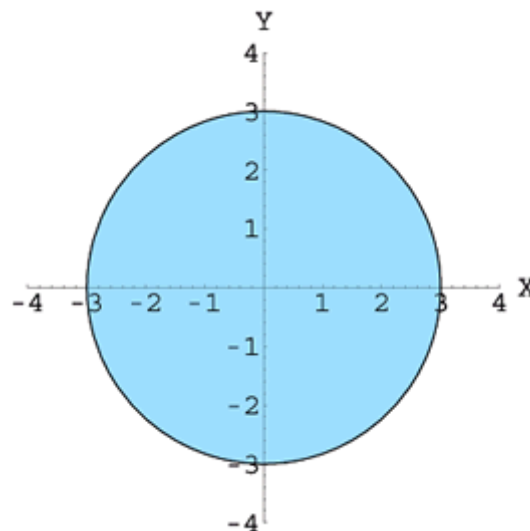


Figura 1: dominio de $f(x, y)$

4.3 Curvas y superficies de nivel

El conjunto de parejas ordenadas x, y se llama dominio de la función y el conjunto de valores correspondiente a z se llama contra dominio, rango, ámbito. Una función de dos variables se escribe $z = "f(x, y) \text{ de } x, y"$.

Las variables x , y se denominan variables independientes y z la variable dependiente.

La gráfica de una función Z es una superficie del espacio tridimensional. El potencial electrostático en un punto $P(x,y)$ del plano debido a una carga puntual unitaria, colocada en el origen está dada por:

Donde C es una constante positiva, las líneas o curvas equipotenciales son círculos alrededor de la carga y se les denomina curvas del nivel

Las curvas de nivel se usan en la elaboración de mapas orográficos o planos de configuración.

En los mapas meteorológicos o climáticos, las curvas de nivel se llaman isotérmicos (cuando la temperatura es constante: isotérmico), en un mapa meteorológico que represente la presión atmosférica se les llama isobalos (presión barométrica constante).

4.4 Derivadas parciales de funciones de varias variables y su interpretación geométrica

Así como su interpretación geométrica

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$f_x(x, y) = \frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x + \Delta x), y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z = f(x, y)$$

$$f_y(x, y) = \frac{dz}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

SÍMBOLOS ALTERNATIVOS

$$f_x = z_x = \frac{dz}{dx} = f_x(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx}$$

$$f_y = z_y = \frac{dz}{dy} = f_y(x, y) = \frac{df(x, y)}{dy}$$

4.5 Derivada direccional

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(1,1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(1,1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{h} \end{aligned}$$

La derivada direccional de f en en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$ es

si el límite existe.

Teorema

Si f es una función diferenciable de y , entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{u}$ y

Nota: Si $\vec{u}$ es un vector unitario

Demostración: Si definimos una función g de la variable individual h por $g(h) =$

entonces, por la definición de una derivada tenemos

Por otra parte podemos escribir $g(h) = f(x,y)$, donde $x =$, de modo que la regla de la cadena da

si ahora podemos $h=0$, entonces $x =$, $y = y$
 $g'(0) =$

comparando las ecuaciones veremos que

si el vector unitario $\vec{u}$ forma un ángulo θ con el eje x positivo (como se ve en la siguiente figura)

entonces escribimos $\vec{u} =$ y lfa formula se convierte en

Minimización de la derivada direccional

En una función "f" de tres variables, existen varias derivadas direccionales en un punto determinado. El siguiente teorema sirve para encontrar la dirección en que "f" cambia mas lento y encontrar la mínima razón de cambio.

4.6 Derivadas parciales de orden superior

Las derivadas parciales de primer orden f_x y f_y son a su vez funciones de "x" y "y" por lo que se pueden derivar con respecto de x o de y. Las derivadas parciales de $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son derivadas parciales de segundo orden de f.

4.7 Incrementos, diferenciales y regla de la cadena

Sea $w = f(x, y)$ y sea Δx y Δy los incrementos de x y de y respectivamente.

El incremento Δw de $w = f(x, y)$ es:

$$\Delta w = (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y))$$

$$w = f(x, y) = 3x^2 - xy$$

a).-

$$[3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] + [3x^2 - xy] =$$
$$(6a - b)x - a(y - 3a + b)$$

$$= 6ax - bx - ay + 3a^2 - ab$$

$$= 6x\Delta x - x\Delta y - y\Delta x + 3\Delta x^2 - \Delta x\Delta y$$

B).- Aplicar Δw para calcular el cambio en $f(x, y)$ (1, 2) a (1.01, 1.98)

$$\Delta w = (6 * 0.01 + 0.02) * 1 - 0.01 * (2 - 3 * 0.01 - 0.02) = 0.0605$$

Sea $w = f(x, y, z)$ y sea $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ los incrementos x, y, z , de respectivamente:

a).- Las diferencias dx, dy y dz de las variables independientes x, y, z

$$dx = \Delta x \quad dy = \Delta y \quad dz = \Delta z$$

b).- La diferencial de w en este caso es

$$dw = \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz$$

Regla de la Cadena

$$w = f(u, v)$$

$$u = g(x, y)$$

$$v = k(x, y)$$

Donde f, g, h son diferenciales

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dy} + \frac{dw}{dv} \cdot \frac{dv}{dy}$$

Ejemplo

$$w = r^2 + 5v + t^3$$

$$r = x^2 + y^2 + z^2$$

$$s = x y z$$

$$v = x e^y$$

$$t = y z^2$$

$$x^4 + x^2 y e^y z + 2x^2 y^2 + 2x^2 z^2 + y^4 + y^4 z^6 + 2y^2 z^2 + z^4$$

$$\frac{dw}{dx} = 4x^3 + 2xye^y z + 4xy^2 + 4xz^2$$

$$\frac{dw}{dy} = x^2 y e^y z + x^2 e^y z + 4x^2 y + 4y^3 + 3y^2 z^6 + 4yz^2$$

$$\frac{dw}{dz} = x^2 y e^y + 4x^2 z + 6y^3 z^5 + 4y^2 z + 4z^3$$

4.8 Derivación parcial implícita

Funciones explícitas y funciones implícitas

En los cursos de cálculo la mayor parte de las funciones con que trabajamos están expresadas en forma explícita, como en la ecuación

$$y = 4x^2 + 3$$

dónde la variable y está escrita explícitamente como función de x . Sin embargo, muchas funciones, por el contrario, están implícitas en una ecuación. La función $y = 1/x$, viene definida implícitamente por la ecuación: $xy = 1$.

Si queremos hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ para esta última ecuación, lo hacemos despejando y , así, $y = 1/x = x^{-1}$, obteniendo su derivada

fácilmente: $\frac{dy}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

El método sirve siempre y cuando seamos capaces de despejar y en la ecuación. El problema es que sino se logra despejar y , es inútil este método. Por ejemplo, ¿cómo hallar dy/dx para la ecuación $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$, donde resulta muy difícil despejar y como función explícita de x ?

El método de regla de la cadena para funciones implícitas

Ya sabemos que cuando se derivan términos que solo contienen a x , la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando tengamos que derivar un término donde aparezca la y , será necesario aplicar la regla de la cadena.

4.9 Gradiente

En cálculo vectorial, el **gradiente** ∇f de un campo escalar f es un campo vectorial. El vector gradiente de f evaluado en un punto genérico x del dominio de f , $\nabla f(x)$, indica la dirección en la cual el campo f varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de f en la dirección de dicho vector gradiente. El gradiente se representa con el operador diferencial nabla ∇ seguido de la función (cuidado de no confundir el gradiente con la divergencia, ésta última se denota con un punto de producto escalar entre el operador nabla y el campo). También puede representarse mediante $\vec{\nabla} f$, o usando la notación $\text{grad}(f)$. La generalización del concepto de gradiente a campos f vectoriales es el concepto de matriz Jacobiana.

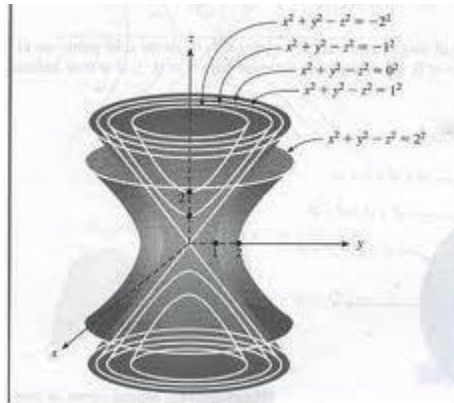
4.10 Campos vectoriales

En matemáticas, un **campo vectorial** representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Es una expresión de cálculo vectorial que asocia un vector a cada punto en el espacio euclidiano, de la forma $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Los campos vectoriales se utilizan en física, por ejemplo, para representar la velocidad y la dirección de un fluido en el espacio, o la intensidad y la dirección de fuerzas como la gravitatoria o la fuerza electromagnética.

Como expresión matemática rigurosa, los campos vectoriales se definen en variedades diferenciables como secciones del fibrado tangente de la variedad. Este es el tipo de tratamiento necesario para modelizar el espacio-tiempo curvo de la teoría general de la relatividad por ejemplo.

4.11 Divergencia, rotacional, interpretación geométrica y física



En cálculo vectorial, un potencial vectorial es un campo vectorial cuyo rotacional es un campo vectorial. Esto es análogo al potencial escalar, que es un campo escalar cuyo gradiente negativo es también un campo vectorial. Formalmente, dando un campo vectorial v , un potencial vectorial es un campo vectorial A tal que

Si un campo vectorial v admite un potencial vectorial A , entonces de la igualdad (la divergencia del rotacional es cero) se tiene lo cual implica que v debe ser un campo vectorial solenoidal. Una pregunta interesante es si cualquier campo vectorial solenoidal admite un potencial vectorial. La respuesta es afirmativa si el campo vectorial satisface ciertas condiciones.

Teorema

Sea un campo vectorial solenoidal el cual es dos veces diferenciable. Asumamos que $v(x)$ decrece suficientemente rápido cuando $\|x\| \rightarrow \infty$. Definamos Entonces, A es un potencial vectorial para v , esto es, Una generalización de este teorema es la descomposición de Helmholtz la cual establece que cualquier campo vectorial puede descomponerse como una suma de campo vectorial solenoidal y un campo vectorial no rotacional.

4.12 Valores extremos de funciones de varias variables

Sea una función $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que $(x_0, y_0, z_0) \in A$ es un punto de máximo o global si para todo $(x, y, z) \in A$ es verdadero que $f(x, y, z) \leq f(x_0, y_0, z_0)$.

Sea una función $f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ decimos que $(x_0, y_0, z_0) \in A$ es un punto de mínimo o global si para todo $(x, y, z) \in A$ es verdadero que $f(x, y, z) \geq f(x_0, y_0, z_0)$.

¿QUÉ ES UN PUNTO DE EXTREMO ABSOLUTO O GLOBAL SOBRE UN CONJUNTO A PARA UNA FUNCIÓN REAL DE N VARIABLES REALES?

Es un punto de A en el cual la función alcanza el mayor o el menor valor respecto al resto de los valores que toma dicha función en los puntos de A.

¿Y CUÁNDO HABLAMOS DE PUNTOS DE EXTREMO LOCAL O RELATIVO?
Pues cuando el máximo o el mínimo lo es respecto al resto de los valores que toma la función en cierto entorno del punto (este entorno se asume subconjunto de A) pero no necesariamente respecto al resto de los valores de la función en los demás puntos de A.

Ejemplos:

El punto es un punto de mínimo absoluto y local para la función definida por:

El punto es un punto de máximo absoluto y local para la función definida por:

Al igual que en el caso de funciones de una variable una función de varias variables puede alcanzar un extremo local en puntos donde puede o no ser diferenciable. ¿Pero en cualquier punto en el cual sea diferenciable ella puede alcanzar un máximo o mínimo? La respuesta se recoge en el teorema siguiente el cual es una extensión del llamado Teorema de Fermat al caso de funciones de varias variables aunque solo será enunciado para el caso de tres variables.

Como se ve este teorema solo expresa condiciones necesarias de existencia de extremo local bajo el supuesto de que la función tiene derivadas parciales respecto a cada variable definidas en dicho punto (para ello es suficiente pero no necesario que la función sea diferenciable). A los puntos que anulan todas las parciales de primer orden se les denomina puntos estacionarios.